ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ HỒNG HOA

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC VỀ HÀM LỒI VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ HỒNG HOA

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC VỀ HÀM LỒI VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN, 10/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
$L^p[a,b]$	không gian các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[a,b]$
C^o	phần trong của tập C
$\mathcal{A}$	trung bình cộng
$\mathcal{G}$	trung bình nhân
$\mathcal{H}$	trung bình điều hòa
$\mathcal{L}$	trung bình lôgarit
$\mathcal{L}_p$	trung bình p-lôgarit

Mở đầu

Hàm lồi và tập lồi đã được nghiên cứu từ lâu bởi Hölder, Jensen, Minkowski. Đặc biệt với những công trình của Fenchel, Moreau, Rockafellar vào các thập niên 1960 và 1970 đã đưa giải tích lồi trở thành một trong những lĩnh vực phát triển nhất của toán học. Bên cạnh đó, một số hàm không lồi theo nghĩa đầy đủ nhưng cũng chia sẻ một vài tính chất nào đó của hàm lồi. Chúng được gọi là các hàm lồi suy rộng (generalized convex function)...

Mục tiêu của đề tài luận văn là trình bày các kiến thức cơ bản về tập lồi, hàm lồi một biến, hàm lồi nhiều biến, hàm J-lồi, hàm s-lồi, bất đẳng thức Hermite–Hadamard cho hàm lồi, hàm lồi khả vi, hàm s-lồi và ứng dụng trong chứng minh một số bất đẳng thức trong toán phổ thông, đánh giá các giá trị trung bình. Luận văn cũng trình bày một số bất đẳng thức suy rộng của bất đẳng thức Hermite–Hadamard cho hàm khả vi n-lần, hàm J-lồi, hàm s-lồi, hàm s-lõm trong các công trình [7], [8] công bố năm 2012 và 2017.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 trình bày và chứng minh các bất đẳng thức Hermite–Hadamard cho hàm lồi một biến, hàm lồi khả vi bậc nhất, bậc hai, bậc n và ứng dụng đánh giá một số giá trị trung bình và chứng minh một số bài tập bất đẳng thức trong chương trình toán phổ thông.

Chương 2 trình bày khái niệm về hàm J-lồi và một số tính chất của lớp hàm J-lồi, khái niệm hàm s-lồi, tính chất của hàm s-lồi, ví dụ về hàm s-lồi. Trình bày các bất đẳng thức Hermite–Hadamard cho hàm s-lồi, trình bày chi tiết các chứng minh các bất đẳng thức này, cùng một số ứng dụng cho giá trị trung bình đặc biệt.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập, nghiên cứu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy, cô trong Khoa Toán - Tin, trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy - Người đã tận tình hướng dẫn tác giả hoàn thành luận văn này.

Xin cảm ơn những người thân trong gia đình đã hết sức thông cảm, chia sẻ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi để tôi có thể học tập, nghiên cứu và hoàn thành những công việc của mình.

Tôi cũng xin gửi những lời cảm ơn đặc biệt nhất tới tất cả những người bạn thân yêu, những người đã yêu mến, chia sẻ với tôi những khó khăn trong khi tôi thực hiện luận văn.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2018

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Hồng Hoa

Chương 1

Hàm lồi và bất đẳng thức Hermite–Hadamard

Chương này giới thiệu khái niệm về hàm lồi; trình bày một số bất đẳng thức dạng Hermite–Hadamard cho hàm lồi, hàm lồi khả vi và ứng dụng đánh giá một số giá trị trung bình đặc biệt và chứng minh một số bài tập bất đẳng thức trong chương trình toán phổ thông. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1], [3], [4], [7], [8] và [10].

1.1 Hàm lồi một biến và bất đẳng thức Hermite–Hadamard

1.1.1 Bất đẳng thức Hermite–Hadamard cho hàm lồi

Định nghĩa 1.1.1 Hàm $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi nếu với mọi $x, y \in [a,b]$ và $\lambda \in [0,1]$ thì

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Hàm f được gọi là hàm lõm nếu hàm $(-f)$ là lồi.

Hệ quả 1.1.2 ([11, Hệ quả 2.1]) *Hàm $f(x)$ khả vi hai lần trên khoảng mở $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ là hàm lồi nếu và chỉ nếu đạo hàm cấp hai của nó không âm trên toàn khoảng (a,b).*

Rất nhiều bất đẳng thức quan trọng được thiết lập từ lớp các hàm lồi. Một trong những bất đẳng thức nổi tiếng nhất là bất đẳng thức Hermite–

Hadamard (còn gọi là bất đẳng thức Hadamard). Bất đẳng thức kép này được phát biểu trong định lý sau.

Định lý 1.1.3 ([3, The Hermite–Hadamard Integral Inequality]) *Cho f là một hàm lồi trên $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a \neq b$. Khi đó*

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.1}$$

Bất đẳng thức (1.1) có thể viết lại dưới dạng:

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Vì hàm f lồi trên đoạn $[a,b]$, nên với mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Lấy tích phân hai vế theo λ trên đoạn $[0,1]$, ta nhận được

$$\int\limits_0^1 f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big)d\lambda \leq f(a)\int\limits_0^1 \lambda d\lambda + f(b)\int\limits_0^1 (1-\lambda)d\lambda. \tag{1.3}$$

Vì

$$\int\limits_0^1 \lambda d\lambda = \int\limits_0^1 (1-\lambda)d\lambda = \frac{1}{2}$$

và bằng phép đổi biến $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, suy ra

$$\int\limits_0^1 f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big)d\lambda = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Kết hợp với (1.3) ta nhận được bất đẳng thức thứ hai của (1.1).

Cũng do tính lồi của hàm f,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big[f(\lambda a + (1-\lambda)b) + f((1-\lambda)a + \lambda b)\big] \\
&\qquad\qquad \geq f\left[\frac{\lambda a + (1-\lambda)b + (1-\lambda)a + \lambda b}{2}\right] \\
&\qquad\qquad = f\left(\frac{a+b}{2}\right).
\end{aligned}$$

Tích phân hai về bất đẳng thức này theo λ trên đoạn $[0,1]$ ta nhận được

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(\lambda a+(1-\lambda)b)d\lambda + \int_0^1 f((1-\lambda)a+\lambda b)d\lambda\right]$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Bất đẳng thức thứ nhất của (1.1) được chứng minh. $\square$

Hệ quả 1.1.4 (xem [3]) *Nếu $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi hai lần trên $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ và $m\le g''(t)\le M$ với mọi $x\in[a,b]$, m, M là hằng số xác định, thì*

$$\frac{m}{24}(b-a)^2 \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{M}{24}(b-a)^2. \tag{1.4}$$

Chứng minh. Đặt $f(x)=g(x)-\dfrac{m}{2}x^2$ với mọi $x\in[a,b]$. Khi đó,

$$f''(x)=g''(x)-m\ge 0,\quad \forall x\in(a,b)$$

chứng tỏ hàm f là lồi trên khoảng mở (a,b). Áp dụng bất đẳng thức Hermite–Hadamard cho hàm f ta nhận được

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{m}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[g(x)-\frac{m}{2}x^2\right]dx$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx - \frac{m}{2}\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx - \frac{m}{2}\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Do đó,

$$\frac{m}{2}\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{m}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right).$$